JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 21. studenog 2025.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Trajanje: 2 sata.

Zadatak 1. (*13 bodova*)

(a) Neka je Ω neprazan skup te $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ familija podskupova od Ω; $\mathcal{P}(\Omega)$ je oznaka za skup svih podskupova od Ω.

(a1) (*2 boda*) Definirajte kada kažemo da je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω.

(a2) (*3 boda*) Ako je $\Omega = \{1, 2, 3\}$ i $\mathcal{G} = \{\{1\}, \{2\}\}$, nadopunite $\mathcal{G}$ do najmanje σ-algebre koja sadrži skupove iz $\mathcal{G}$.

(b) (*4 boda*) Tri igrača naizmjence bacaju novčić na kojem je vjerojatnost da padne pismo jednaka $p \in (0, 1)$. Pobjednik je onaj koji prvi dobije pismo. Kolika je vjerojatnost da će pobijediti igrač koji je prvi bacio novčić?

(c) Pretpostavimo da imamo $n \geq 3$ točaka u ravnini označenih brojevima $1, 2, \ldots, n$, pri čemu niti jedna trojka točaka ne leži na nekom pravcu, te je svaki par točaka spojen bridom – dakle, imamo ukupno $\binom{n}{2}$ bridova. Svaki brid, nezavisno od drugih, obojimo u plavo s vjerojatnosti $p \in (0, 1)$ ili u crveno s vjerojatnosti $q := 1 - p$.

(c1) (*2 boda*) Odredite vjerojatnost da točke $1, 2, n$ čine trokut povezan bridovima iste boje.

(c2) (*2 boda*) Odredite očekivani broj trokuta u grafu koji su povezani bridovima iste boje.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 21. studenog 2025.

Zadatak 2. (*12 bodova*)

(a) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$ događaji.

(a1) (*2 boda*) Precizno definirajte uvjetnu nezavisnost događaja A i B uz dano C.

(a2) (*3 boda*) Ako su A i C nezavisni te B i C nezavisni, moraju li $A \cap B$ i C biti nezavisni? Ako da, dokažite, a ako ne, opovrgnite protuprimjerom.

(b) (*4 boda*) Rafael i Roger imaju na raspolaganju 4 teniska terena, od čega su 3 zemljana, a 1 travnati. Oni će nasumično odabrati jedan teren te na njemu odigrati 2 meča. Poznato je da u meču na zemlji, Rafael ima vjerojatnost pobjede $\frac{4}{5}$, dok u meču na travi, Roger pobjeđuje s vjerojatnošću $\frac{3}{5}$. Ako je u oba meča pobijedio Roger, koja je vjerojatnost da su odabrali zemljani teren?

(c) (*3 boda*) Na šahovsku ploču dimenzija 8×8 postavljamo 4 topa. Topove postavljamo jedan po jedan tako da svaki nasumično stavimo na neko od preostalih slobodnih polja. Odredite vjerojatnost da se nikoja dva topa neće napadati.

Napomena. Top napada sva polja u svom retku i stupcu.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 21. studenog 2025.

Zadatak 3. (*13 bodova*)

(a) Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i neka je X diskretna slučajna varijabla s distribucijom $X \sim \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{smallmatrix}\right)$.

(a1) (*2 boda*) Mora li postojati matematičko očekivanje slučajne varijable X te ako postoji kako ga definiramo?

(a2) (*3 boda*) Neka je (H_1, H_2, H_3) potpun sustav događaja. Iskažite i dokažite formulu potpunog očekivanja za X.

(b) (*4 boda*) Bacimo n simetričnih kocki koje sve imaju 2 crvene i 4 plave strane. One koje su pale na crveno bacimo još jednom. Odredite očekivani broj kocki koje su pale na crveno nakon drugog bacanja.

(c) (*4 boda*) Simetrična kocka ima 2 crvene i 4 plave strane. Koliki je očekivani broj bacanja dok prvi put kocka padne na crveno dva puta za redom?

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 21. studenog 2025.

Zadatak 4. (*12 bodova*)

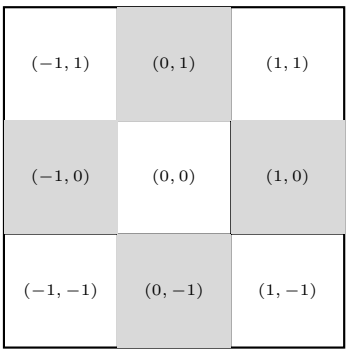
(a) (*2 boda*) Precizno definirajte *nezavisnost* slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definiranih na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(b) Slučajno se odabire jedan od devet manjih kvadrata na slici. Svi bijeli kvadrati su jednako vjerojatni, svi sivi kvadrati su jednako vjerojatni, te je vjerojatnost odabira jednog od bijelih kvadrata jednaka k puta vjerojatnosti odabira jednog od sivih kvadrata, $k > 0$. Slučajni vektor (X, Y) jednak je uređenom paru u odabranom kvadratu.

(b1) (*3 boda*) Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y) (ovisno o parametru k).

(b2) (*2 boda*) Izračunajte $\mathbb{E}[X|Y = 0]$.

(b3) (*2 boda*) Nađite sve $k > 0$ tako da su slučajne varijable X i Y nezavisne.



(c) (*3 boda*) Neka su X i Y nenegativne slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dokažite da tada vrijedi

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$